Հերքումով թեորեմ

2. Preliminaries (նախնական)

*2.1. Formulas and Clauses*

Մենք կդիտարկենք առանց քանակի (quantifier-free) առաջին կարգի (first-order) բանաձևեր, որոնք կառուցված են փոփոխականներից, ֆունկցիայի նշաններից, պրեդիկատային նշաններից և տրամաբանական կապերերից: Մենք կաշխատենք հետևյալ տրամաբանական նշանների հետ՝ ⊤ (ճշմարիտ), ⊥ (կեղծ), ¬ (ժխտում), ∨ (դիզյունկցիա), ∧ (կոնյունկցիա), ⊃ (իմպլիկացիա), ⊕ (բացառող դիզյունկցիա) և ≡ (հավասարություն)։ Թերմը կա՛մ փոփոխական է, կա՛մ արտահայտություն f(t1, . . . ., tn), որտեղ f-ը n տեղանի ֆունկցիայի է, իսկ t1, . . . , tn թերմեր են։

Ատոմային բանաձևը (կամ ատոմը) արտահայտությունն է P(t1, . . . . , tn), որտեղ P-ն n տեղանի պրեդիկատային սիմվոլ է և t1, . . . , tn թերմեր են։ A պրեդիկատային սիմվոլը, որի երկարությունը (arity) 0 է կոչվում է *propositional constant.* Aլիտերալը արտահայտություն է՝ A (դրական լիտերալ (positive literal)) կամ ¬A (բացասական լիտերալ (negative literal)), որտեղ A-ն ատոմային բանաձև է։ Երկու լիտերալ՝ A և ¬A, կոչվում են լրացուցիչ (complementary):

Տրված S բազմության վրա բազմություն-թվաքանակը (multiset) ֆունկցիա է Σ, որը S-ից պատկերված է բնական թվերի բազմության վրա։ Ինտուիտիվորեն, Σ(x)-ը ցույց է տալիս, թե քանի անգամ է x-ն հանդիպում Σ-ում։ Եթե Σ-ը բազմություն-թվաքանակ (multiset) է, իսկ S-ը՝ բազմություն, ապա գրում ենք Σ ⊆ S՝ ցույց տալու համար, որ (բազմություն-թվաքանակի) Σ-ի յուրաքանչյուր տարր S-ի տարր է։ Σ \ S-ով նշում ենք այն բազմություն-թվաքանակը Σ′, որի համար Σ′(x) = 0, երբ x-ն պատկանում է S-ին, իսկ Σ′(x) = Σ(x), եթե x-ն չի պատկանում S-ին։ Մենք հաճախ օգտագործելու ենք հաջորդականություններ կամ բազմությունների նման նշումներ բազմություն-թվաքանակները (multiset) նշելու համար և գրում, օրինակ, Σ,Δ՝ Σ ∪ Δ փոխարեն, կամ Σ,A՝ Σ ∪ {A} փոխարեն։ Օրինակ, ¬A,B,B-ով մենք նշում ենք բանաձևերի բազմություն-թվաքանակը Σ, որի համար Σ(¬A) = 1, Σ(B) = 2, իսկ Σ(F) = 0՝ մնացած բոլոր բանաձևերի F-ի համար։

Բանաձևերի վերջավոր բազմություն-թվաքանակը (multiset) կարող է ներկայացվել որպես դրա տարրերի դիզունկցիա (disjunction), կամ կոնյուկցիա (conjunction): Մենք բազմություն-թվաքանակները կմեկնաբանենենք որպես դիզունկցիաներ և կանվանենք ընդհանուր քլաուզների (general clauses)։ Դատարկ բազմություն-թվաքանակը ներկայացնում է ⊥ հաստատունը։ Եթե (F1, . . ., Fn) ընդհանուր քլաուզ է, ապա ¬(F1, . . ., Fn)-ով նշում ենք ¬F1 ∧ . . . ∧ ¬Fn բանաձևը: Եթե ընդհանուր քլաուզի բոլոր տարրերը բառեր են (literals), ապա այն կոչվում է ստանդարտ քլաուզ (standard clause)։ Ստանդարտ քլաուզները սովորաբար գրվում են որպես դիզունկցիաներ ՝ L1 ∨ L2 ∨ . . . ∨ Ln։

Մենք գրում ենք E[E′]p՝ նշելու համար այն արտահայտությունը, որը ստացվում է E արտահայտության մեջ p դիրքում ենթաարտահայտությունը (subexpression) E′-ով փոխարինելով։ E(E′)-ով ցույց ենք տալիս, որ E արտահայտությունը պարունակում է առնվազն մեկ E′ ենթաարտահայտություն։

Արտահայտությունները, որոնք չեն պարունակում փոփոխականներ, կոչվում են հիմնավորված (ground) կամ փակ (closed): Երբ ցանկանում ենք ընդգծել, որ արտահայտությունը կարող է պարունակել փոփոխականներ, օգտագործում ենք «առաջին կարգի արտահայտություն» (first-order expression) տերմինը։

*2.2. Հերբրանդի ինտերպրետացիաներ (Herbrand Interpretations)*

Մեկնաբանությունը (Herbrand) ատոմների (ground) բազմություն է։ A ատոմը կհամարվի ճիշտ (true) I մեկնաբանությունում , եթե A ∈ I, և կհամարվի կեղծ (false) հակառակ դեպքում։ Կոնյուկցիա A ∧ B-ը ճիշտ է I-ում, եթե թե A-ն, և թե B-ն ճիշտ են I-ում։ Դիզյունկցիա A ∨ B-ը ճիշտ է, եթե առնվազն մեկը՝ A կամ B, ճիշտ է I-ում։ Ընդհանուր քլաուզ (F1, . . . , Fn)-ը ճիշտ է I-ում, եթե առնվազն մեկ բանաձև Fi ճիշտ է I-ում։

Մեկնաբանություն I կոչվում է E արտահայտության մոդել (model), եթե E-ն ճիշտ է I-ում, և N արտահայտությունների բազմության մոդել, եթե այն մոդել է բոլոր արտահայտությունների համար, որոնք պատկանում են N-ին։ Արտահայտությունը կամ արտահայտությունների բազմությունը կոչվում է բավարարելի (satisfiable) կամ համատեղելի (consistent), եթե այն ունի մոդել, և անկատարելի (unsatisfiable) կամ անհամատեղելի (inconsistent)՝ հակառակ դեպքում։ Մենք նաև ասում ենք, որ E′-ը E-ի տրամաբանական հետևանքն է կամ տրամաբանականորեն բխում է E-ից, կամ որ E-ն տրամաբանականորեն ենթադրում է E′ (գրվում է E I= E′), եթե E′-ը ճիշտ է բոլոր մոդելներում, որտեղ E-ն ճիշտ է։

*2.3. Նշանակման համակարգեր (Rewrite Systems)*

Փոխարինումը (substitution) համապատասխանեցում է սահմանված փոփոխականների վրա, որտեղ փոփոխականների նշված թերմերը համապատասխանեցվում են թերմերի և փոփոխականների նշված բանաձևերը՝ բանաձևերի։ Eσ-ով նշում ենք այն արդյունքը, որը ստացվում է σ փոխարինումը E արտահայտության վրա կիրառելիս, և ասում ենք, որ Eσ-ը E-ի առանձին դեպք (օրինակ) (instance) է։ Եթե Eσ-ը ground է (դա նշանակում է, որ այն չունի փոփոխականներ), ապա խոսում ենք E-ի ground օրինակից։

Բինար հարաբերություն ⇒ արտահայտությունների վրա, որոնք ունեն փոփոխականներ, կոչվում է նշանակման (rewrite) հարաբերություն, եթե E′ ⇒ Eնշանակում է, որ E[E′] ⇒ E[E″]՝ բոլոր E, E′ և E″ արտահայտությունների համար։ Եթե ⇒-ը բինար հարաբերություն է, ապա ⇒+ կոչվում է դրա տրանսիտիվ փակումը, ⇒∗՝ տրանսիտիվ-ռեֆլեքսիվ փակումը, ⇔՝ սիմետրիկ փակումը, և ⇔∗՝ տրանսիտիվ-ռեֆլեքսիվ-սիմետրիկ փակումը։

Փոխարինման համակարգը բինար հարաբերություն է արտահայտությունների վրա, որոնք ունեն փոփոխականներ, որի տարրերը կոչվում են վերաձևման կանոններ և գրվում են որպես E ⇒ E′։ Եթե R վերաձևման համակարգ է, ապա ⇒R-ով նշում ենք այն փոքրագույն նշանակման հարաբերությունը, որը պարունակում է R-ում կանոնների բոլոր օրինակները՝ Eσ ⇒ E′σ։ Մենք ասում ենք, որ E-ն կարող է նշանակվել E′-ի՝ R համակարգով, եթե E ⇒R E′։

*2.4. Հերքումով թեորեմի ապացուցում (Refutational Theorem Proving)*

Հակասության հիման վրա թեորեմի ապացուցումը լուծում է համարժեք խնդիրը՝ ցույց տալով, որ N∪{¬F} բազմությունը անհամատեղելի (inconsistent) է, որտեղ F-ը եզրակացությունն է իսկ N-ը թեորեմը։

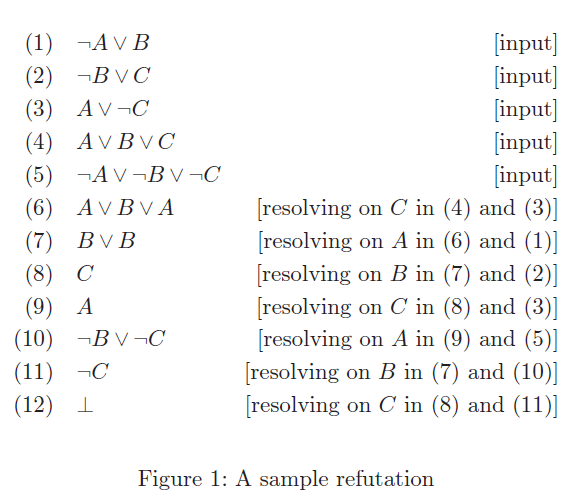
Մեր նպատակների համար եզրահանգման կանոնը (inference rule) n+1-երի հարաբերությունն է ընդհանուր քլաուզների վրա։ Սովորաբար գրվում է այսպես՝

-ը կոչվում են inference premises իսկ C-ն եզրակացություն (conclusion)։ …

3. Ստանդարտ ռեզոլուցիա (Standard Resolution)

*Binary resolution with factoring*

Մենք կխոսենք A-ի վրա ռեզոլուցիաի մասին և եզրակացությունը (inference) կանվանենք երկու premise-ների resolvent։ Հիմնական premise-ը -ն է իսկ երկրորդական։ B-ով նշանակում ենք բոլոր բինար ռեզոլուցիաների (binary resolution) և ֆակտորինգի (factoring) միջոցով իրականացվող եզրակացությունների բազմությունը։ B հաշվարկը օգտագործվում է Նկար 1-ում՝ հինգ տրված սկզբնական կլաուզաներից հակասություն ստանալու համար։



Ռեզոլուցիան ճիշտ եզրակացությունն է։ ֆակտորինգով բինար ռեզոլուցիան նույնպես ամբողջական է, որը մենք ապացուցում ենք ցույց տալով, որ բ-ում փակված քլաուզների ցանկացաց անհամատեղելի բազմություն իր մեջ պարունակում է հակասություն։ Այս պնդմանը հակադարձ կասենք, որ եթե քլաուզների բազմությունը անհամատեղելիություններ չի պարունակում, ապա ունի մոդել։ Մենք սահմանում ենք Հերբրանդի մոդել (Herbrand model)` օգտագործելով ինդուկցիա՝ հատուկ ընտրված քլաուզաների դասավորության վրա։

Սահմանենք որպես քլաուզաների ամբողջական և ընդունելի դասավորություն։ Տրված է N քլաուզաների բազմություն, մենք օգտագործում ենք ինդուկցիա -ի նկատմամբ՝ յուրաքանչյուր C քլաուզի համար (որը պարտադիր չէ, որ պատկանի N-ին) սահմանելու Հերբրանդի մեկնաբանություն *IC*​ և բազմություն ​` հետևյալ կերպ։

Սահմանում 1։ Սահմանենք *Ic*​ -ն որպես բազմություն . Բացի այդ, եթե C-ն քլաուզ է, ապա

* Պատկանում է N-ին
* Ունի ձև, որտեղ A-ն քլաուզի առավելագույն լիտերալն է
* Սխալ է *Ic*​ -ում

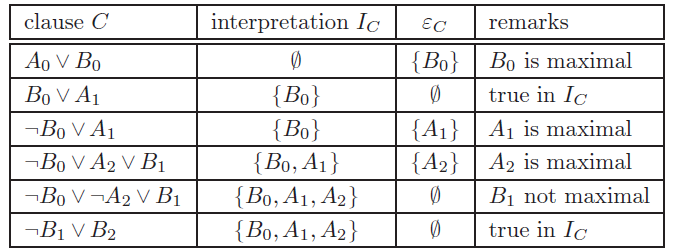
այն դեպքում : Հակառակ դեպքում ​-ն դատարկ բազմություն է։

Մենք նաև ասում ենք, որ C-ն արտադրում (produces) է A, և C-ն անվանում ենք արտադրող քլաուզ (productive clause), եթե : *Ic*​ -ն անվանում ենք C-ից ներքև մասնակի մեկնաբանություն (partial interpretation below C)։ C-ի վրա մասնակի մեկնաբանություն ասելով հասկանում ենք որպես (հնարավոր է՝ ընդլայնված) բազմությունը​: N-ի թեկնածու մոդել (candidate model for N), գրվում է կամ ուղակի, մենք հասկանում ենք Հերբրանդի մեկնաբանություն :

Մասնակի մեկնաբանությունը -ն նախատեսված է լինել -ի մոդել, N-ի այն քլաուզների համար, որոնք C-ից փոքր են (տրված քլաուզների դասավորության համաձայն): Մինչդեռ -ն նախատեսված է լինել -ի նվազագույն ընդլայնում, որը C-ն դարձնում է ճիշտ։ N-ի միայն այն քլաուզները կարող են լինել արտադրող, որոնցում մաքսիմալ ատոմ A-ն դրական է։ Մենք ասում ենք, որ այդպիսի քլաուզը ռեդուկտիվ (reductive) է A-ի համար։ Ռեդուկտիվ քլաուզները կարող են դիտարկվել որպես հետևանքներ՝ : Եթե -ն ճիշտ է, և A-ն դեռ չի ընդգրկվել համապատասխան մասնակի մեկնաբանությունում, ապա մեկնաբանությունը A-ով ընդլայնելը կդարձնի ռեդուկտիվ քլաուզը ճիշտ, բայց չի ազդի (փոքր) քլաուզների ճշմարտության արժեքների վրա, որոնք օգտագործվել են նրա պայմանը գնահատելիս։

Օրնակ՝ դիտարկենք ատոմների հետևալ հերթականությունը՝

. Հետևյալ աղյուսակը նկարագրում է քլաուզների համար տարբեր մասնակի մեկնաբանությունները:



Վերջինից երկու քլաուզները սխալ են վերջնական մեկնաբանությունում :

Լեմմա 1։ Եթե C-ն արտադրող է, ապա այն ճիշտ է ​-ում։

Ապացույց. Եթե C-ն արտադրում է A ատոմը, ապա C-ն ճիշտ է -ում: Քանի որ ​, ապա C-ն նույնպես ճիշտ է -ում: